Tok v elipsasti superprevodni cevi

Matematična fizika 1

Matjaž Drolc
28110031

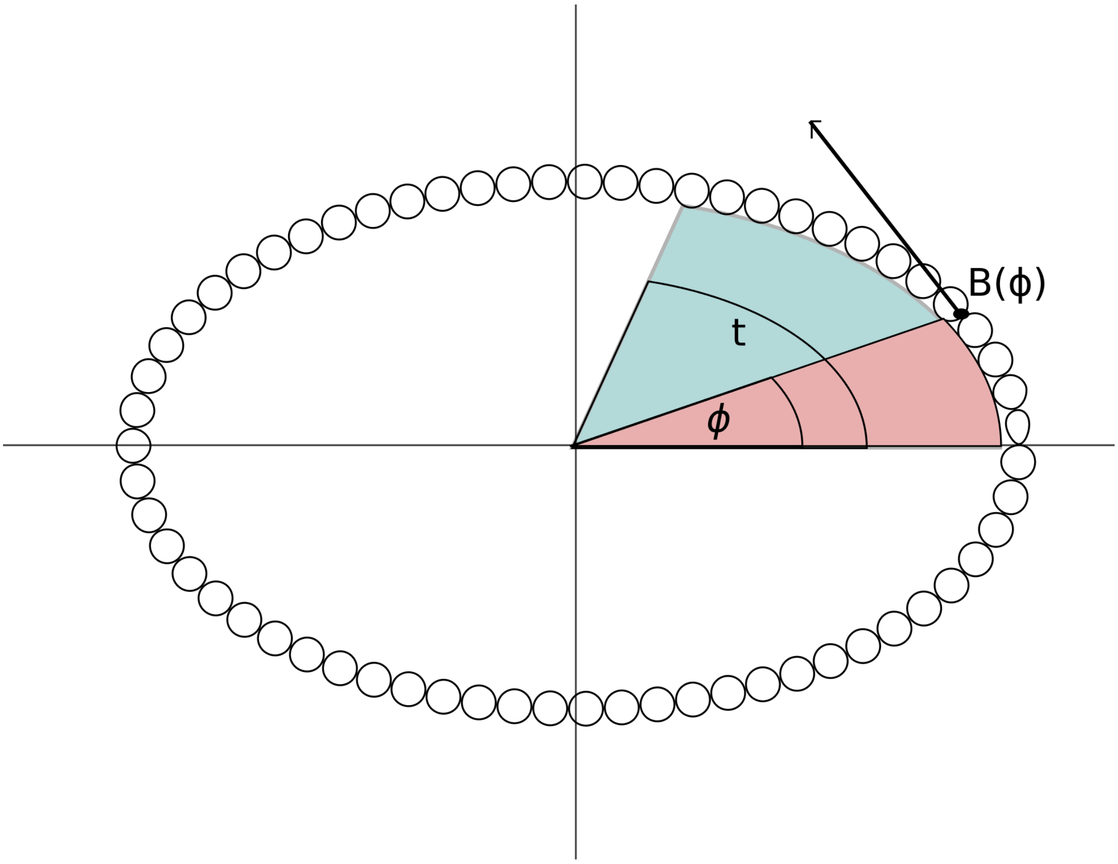
28. 9. 2013

Problem

Po dolgi ravni superprevodni cevi z elipsastim profilom, s polosema a in b teče skupni električni tok I. Poišči dolžinsko gostoto električnega toka $u = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}$ po plašču cevi v ravnovesju.

Model

Dolžinsko gostoto toka po obodu elipse določa Lorentzova sila $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, ki v neravnovesnih stanjih krivi tokovnice. Ker imamo opravka s superprevonikom, električnega polja ni in upoštevamo samo magnetni del sile. Ker je cev neskočno dolga, zaradi simetrije ni magnetnega polja vzdolž cevi, pač pa imamo magnetno polje samo v prečni ravnini. K temu magnetnemu polju pa prispeva samo tok vzdolž cevi. Posledično lahko cev obravnavamo kot skupek tankih neskončnih žic.



Model elipsaste cevi

Ravnovesno stanje

V ravnovesnem stanju zahtevamo, da ni magnetne sile v tangentni smeri na elipso. Ta pogoj bo izpolnjen, če je vektor **B** pravokoten na normalo elipse. Ker normalni in tangentni vektor tvorita bazo za vektor magnetnega polja v ravnini preseka cevi, to pomeni, da dopuščamo magnetno polje kvečjemu v smeri tangente na eliptični profil.

Račun

Točke na elipsasti cevi parametriziramo s kotom ϕ in vzdolžnim položajem z na sledeč način:

$$\mathbf{r} = (a\cos\phi, b\sin\phi, z)$$

Magnetno polje v neki točki izračunamo s pomočjo Biot–Savartovega zakona za 1-dimenzionalen primer: $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, ki ga za naš primer razširimo v 2D:

$$\mathbf{B}(\phi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_E\int_C \frac{\mathrm{d}Id\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Diferencial toka se izraža z iskano funkcijo $u = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}$ kot

$$\mathrm{d}I = u\mathrm{d}s = u\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

Velja še:

$$\mathrm{d}\mathbf{l} = (0, 0, \mathrm{d}z)$$

$$\mathbf{r} = (a\cos\phi - a\cos t, b\sin\phi - b\sin t, -z)$$

Po izračunu vektorskega produkta in norme v imenovalcu dobimo sledeče integrale za posamezne smeri polja:

$$B_x(\phi) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} u(t) * \frac{b(\sin\phi - \sin t)\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{\sqrt{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2 + z^2}^3}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

$$B_y(\phi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{t=0}^{2\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} u(t) * \frac{a(\cos\phi - \cos t)\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{\sqrt{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2 + z^2}^3}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

$$B_z = 0$$

Po integraciji po spremenljivki z dobimo:

$$B_x(\phi) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(t) * \frac{b(\sin\phi - \sin t)\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$B_y(\phi) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_{t=0}^{2\pi} u(t) * \frac{a(\cos\phi - \cos t)\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$B_z = 0$$

Magnetno polje je obrnjeno v smeri tangente, torej je pravokotno na normalo $\mathbf{n} = (-b\cos t, -a\sin t)$, zato je skalarni produkt magnetnega polja in normale enak 0. Tako dobimo sledečo integralsko enačbo:

$$0 = \int_{t=0}^{2\pi} u(t) * \frac{(a^2 \sin\phi(\cos\phi - \cos t) - b^2\cos\phi(\sin\phi - \sin t))\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2}\,\mathrm{d}t$$

To je Fredholmova integralska enačba prve vrste oblike

$$f(\phi) = \int\limits_a^b K(\phi, t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

, pri čemer je

$$K(\phi, t) = \frac{(a^2 \sin\phi(\cos\phi - \cos t) - b^2\cos\phi(\sin\phi - \sin t))\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}{a^2(\cos\phi - \cos t)^2 + b^2(\sin\phi - \sin t)^2}$$

$$\varphi(\phi) = c * u(\phi)$$

, kjer je c neznana konstanta, ki jo kasneje določimo iz pogoja skupne vsote toka.

Rešitev za krog

V primeru kroga lahko $K(\phi, t)$ preoblikujemo v funkcijo razlike $\phi - t$:

$$K(\phi - t) = -\frac{1}{2} r \cot\left(\frac{\phi - t}{2}\right)$$

Integralska enačba se potem z uvedbo novih spremenljivk prevede na konvolucijo in jo lahko rešimo s pomočjo Fourierove transformacije. Enačba oblike

$$g(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\phi - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

ima rešitev

$$f(\phi) = \mathcal{F}_\omega^{-1}\left[\frac{\mathcal{F}_\phi[g(\phi)](\omega)}{\mathcal{F}_\phi[K(\phi)](\omega)}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_\phi[g(\phi)](\omega)}{\mathcal{F}_\phi[K(\phi)](\omega)} e^{2\pi i\omega\phi}\mathrm{d}\omega$$

Ker je enačba homogena, nam ta metoda da samo trivialno rešitev $u = 0$. Iz simetrije pri krogu pa lahko uganemo, da je rešitev tudi $u = konst.$, kar preverimo:

$$0 = u * \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(r^2 \sin\phi(\cos\phi - \cos t) - r^2\cos\phi(\sin\phi - \sin t))\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\mathrm{d}t}{r^2(\cos\phi - \cos t)^2 + r^2(\sin\phi - \sin t)^2} =$$

$$u * \int_{t=0}^{2\pi} -\frac{1}{2} r \cot\left(\frac{\phi - t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \forall\phi, u$$

Rešitev za elipso

Za splošno elipso enačbe ne moremo preoblikovati v konvolucijo, zato se reševanja lotimo numerično z diskretizacijo intervala integracije. Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\sum_{j=1}^{n} K(\phi_i, t_j)\varphi(t_j) = f(\phi_i)$$

V matrični obliki ga zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} K(\phi_1,t_1) & K(\phi_1,t_2) & K(\phi_1,t_3) & ... & K(\phi_1,t_n) \\ K(\phi_2,t_1) & K(\phi_2,t_2) & K(\phi_2,t_3) & ... & K(\phi_2,t_n) \\ K(\phi_3,t_1) & K(\phi_3,t_2) & K(\phi_3,t_3) & ... & K(\phi_3,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(\phi_n,t_1) & K(\phi_n,t_2) & K(\phi_n,t_3) & ... & K(\phi_n,t_n) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi(t_1) \\ \varphi(t_2) \\ \varphi(t_3) \\ \vdots \\ \varphi(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ali

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Iščemo torej jedro matrike A. Pri tem si pomagamo s programom Octave. Uporabimo matrike velikosti 100x100 s parametrizacijo

$$\begin{aligned} t_j &= \tfrac{2\pi}{100} * j \\ \phi_i &= \tfrac{2\pi}{100} * i + \tfrac{\pi}{100} \end{aligned}$$

Parametrizacija za t je glede na ϕ zamaknjena za pol koraka, da se izognemo singularnostim v točkah, za katere velja $t = \phi$. Ker sta funkciji $K(\phi, t)$ in $\varphi(t)$ periodični ter integral teče po celi periodi, to ne spremeni rešitve.

Ničelni prostor matrike nam da obliko rešitve. Da izrazimo končno iskano rešitev $u(\phi) = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s}$ pri nekem določenem skupnem toku I, normiramo rešitve prek sledečega integrala:

$$I = \int_{t=0}^{2\pi} u(t) * \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\mathrm{d}t$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} u(\phi) &= \frac{I * \varphi(\phi)}{\int_{t=0}^{2\pi} \varphi(t) * \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{I * \varphi(\phi)}{a \int_{t=0}^{2\pi} \varphi(t) * \sqrt{\sin^2 t + \epsilon^2 \cos^2 t}\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

,

$$\epsilon = b/a$$

Rešitve pri elipsah z enakim razmerjem $\epsilon = b/a$ so obratno sorazmerne dolžini polosi elipse.

Analiza rešitev

Zaradi primerljivosti so vsi grafi narisani za elipse z obsegom 1 in za tok 1. Ogledujemo si rešitve pri različnih ekscentričnostih $\varepsilon = \sqrt{1 - (\frac{b}{a})^2}$.

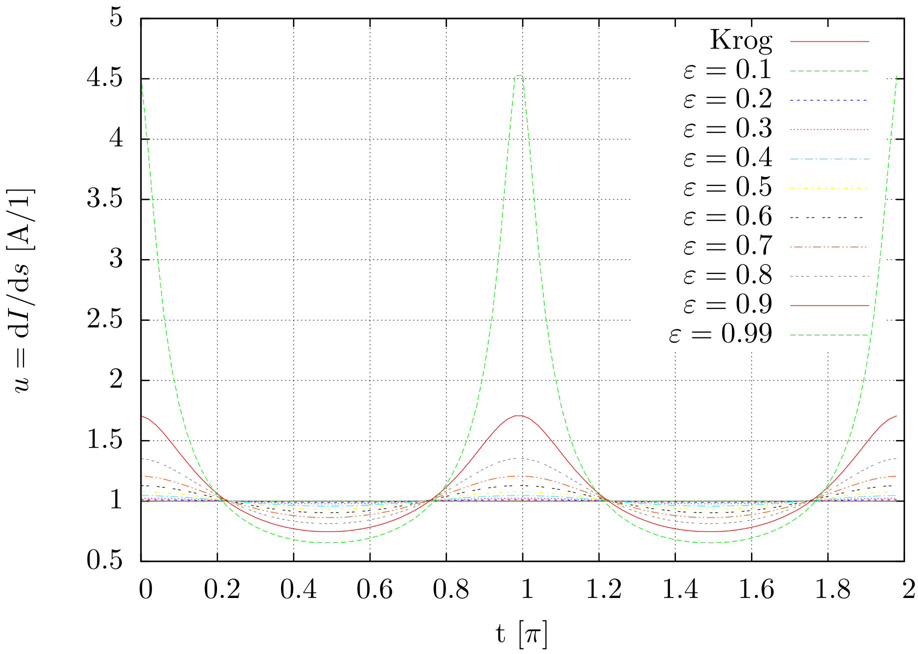
Limita $\varepsilon \to 1$

V tej limiti se enačba preoblikuje v

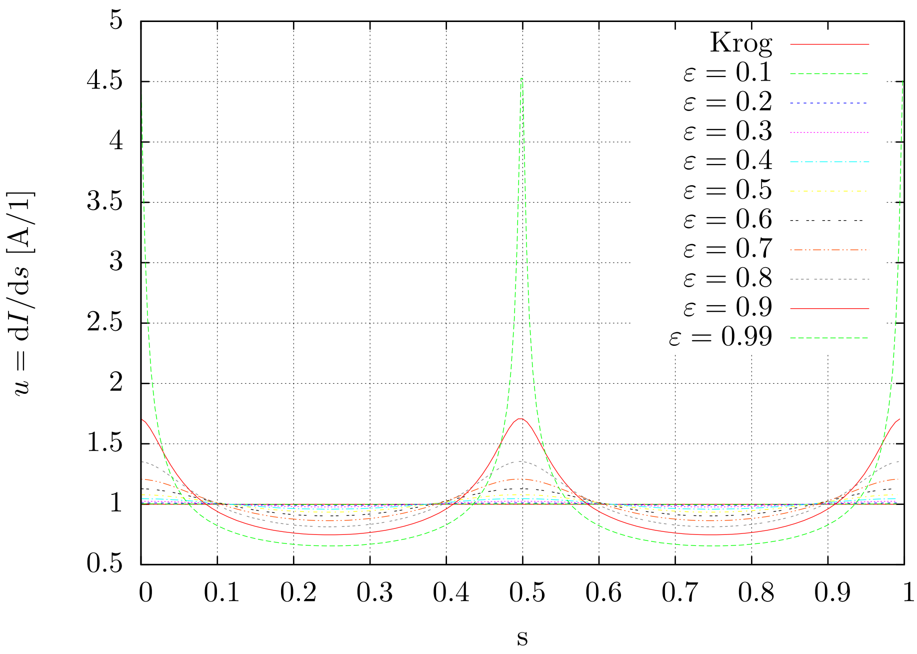
$$0 = a * \int_{t=0}^{2\pi} u(t) * \frac{\sin\phi \sin t}{\cos\phi - \cos t} \, \mathrm{d}t \quad \forall\phi$$

To nam da v limitnem primeru rešitev $u(\phi) \to \infty$ v točkah $\phi = k\pi$, kar lahko vidimo tudi iz grafov.

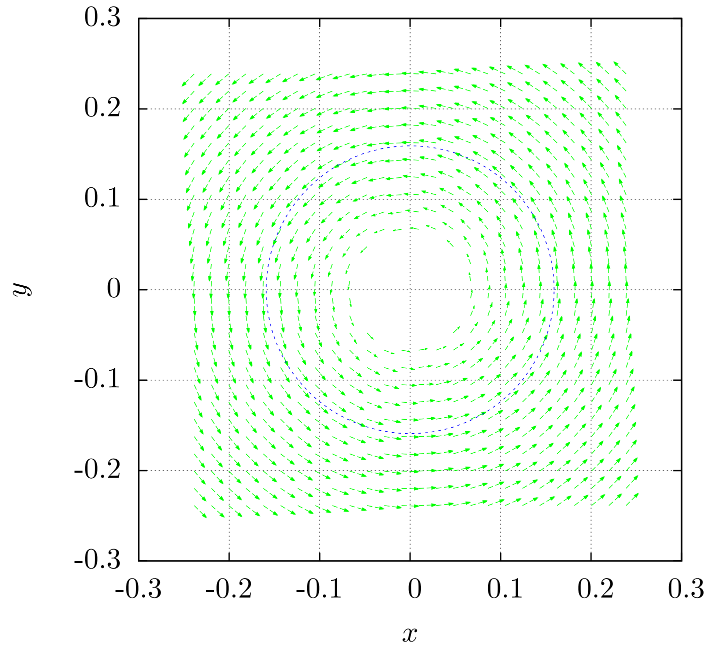
Pregled ostalih rešitev



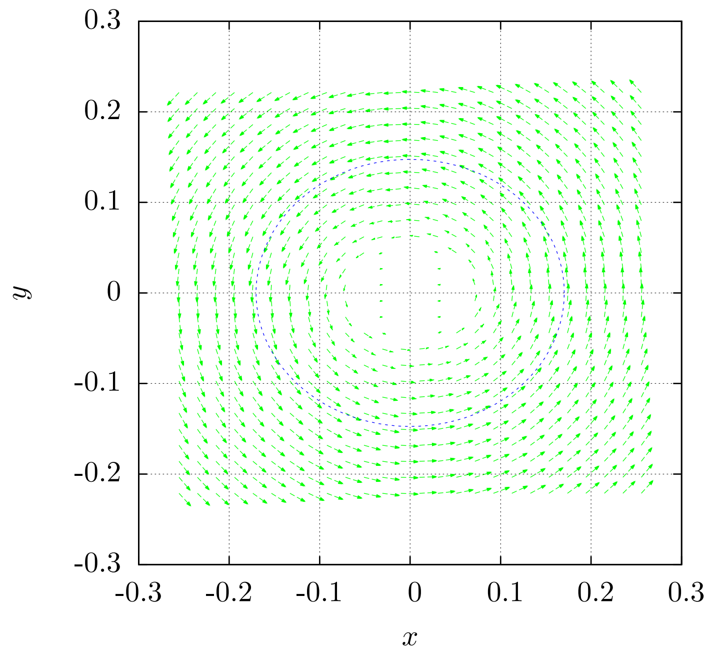
Dolžinska gostota toka u v odvisnosti od kota ϕ



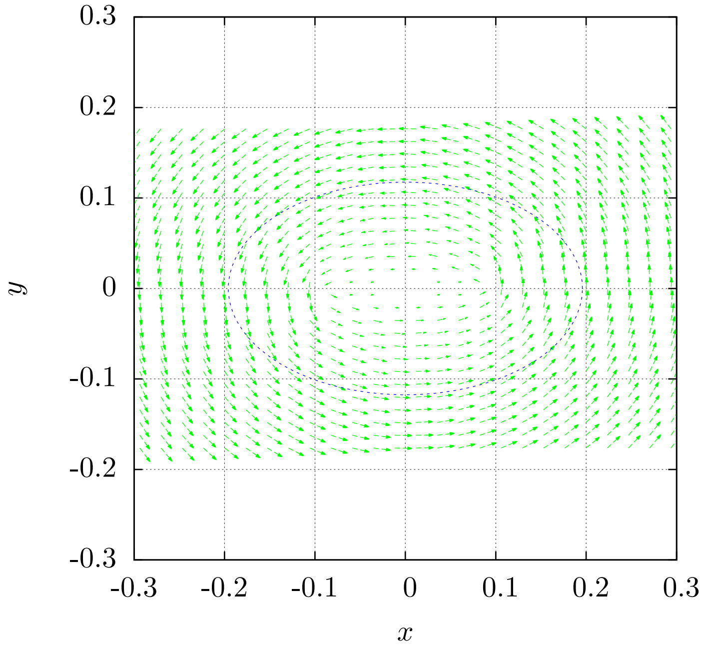
Dolžinska gostota toka u v odvisnosti od ločne razdalje na elipsi. Ničla je v točki $(a, 0)$.



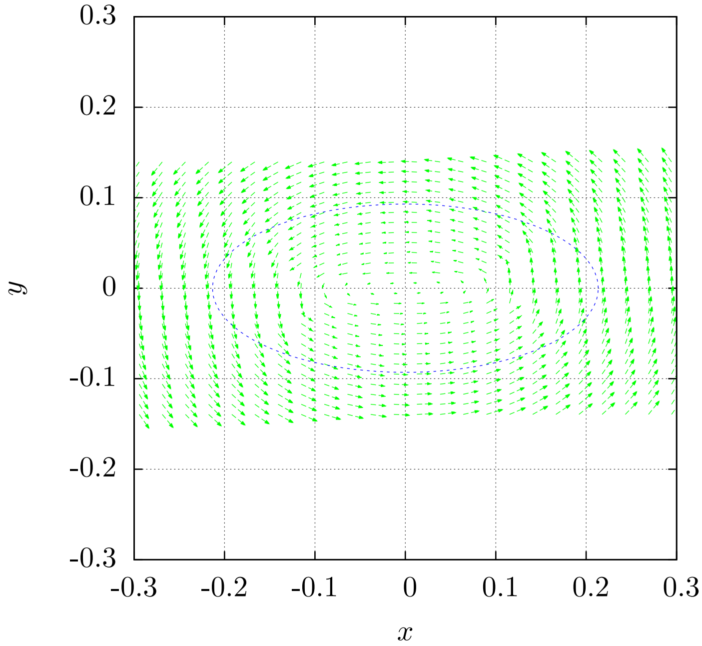
Silnice **B** za krog ($\varepsilon = 0$)



Silnice **B** za elipso ($\varepsilon = 0.5$)



Silnice **B** za elipso ($\varepsilon = 0.8$)



Silnice **B** za elipso ($\varepsilon = 0.9$)

Bibliography

[1] Andrei Dmitrievich POLYANIN. *Fredholm Integral Equations of the First Kind — EqWorld*. [Online; accessed 28-September-2013]. 2013. URL: `http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ie/ie-toc3.htm`.

[2] Wikipedia. *Ellipse — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 28-September-2013]. 2013. URL: `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ellipse&oldid=572647786`.

[3] Wikipedia. *Fredholm integral equation — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 28-September-2013]. 2013. URL: `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fredholm_integral_equation&oldid=540843374`.

[4] Wikipedia. *Integral equation — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 28-September-2013]. 2013. URL: `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Integral_equation&oldid=572938044`.